LEÇON N° 81 :

Exemples d'approximation d'une solution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Cette leçon a été réalisée par Cécile F.

Pré-requis :
– *Fonction dérivée ;*
– *Tangente à une courbe, équation.*

Dans tout cette leçon, f désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) un point appartenant à U.

81.1 Objectifs

De nombreux problèmes (en radioactivité, par exemple) conduisent à étudier une relation entre une fonction et sa dérivée.

Exemple : activité A de N noyaux radioactifs à la date t :

$$-\Lambda \cdot N(t) = A = N'(t),$$

où Λ désigne une constante radioactive égale à la probabilité de désintégration d'un noyau donné par unité de temps (en s^{-1}).

On souhaite résoudre, de manière plus générale, le problème suivant :

$$(S) : \begin{cases} y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

où $y : U_1 \longrightarrow U_2$ une fonction dépendant du paramètre x, simplement notée y dans la suite.

On connaît l'expression de la fonction f dont on cherche à approcher la primitive par rapport à x. Lorsque cette solution (primitive de f par rapport à x, existe puisque f est continue) ne peut être exprimée à partir de l'expression de la fonction f, on cherche une approximation affine par morceaux de cette solution y sur un intervalle $[x_0, b]$ (ou $[b, x_0]$), où $b \in U_1$. Cette approximation sera notée F, et sa courbe $\mathscr{C}_F$.

81.2 Méthode

Soit n un entier naturel non nul fixé, et $b \in U_1$ un réel différent de x_0.

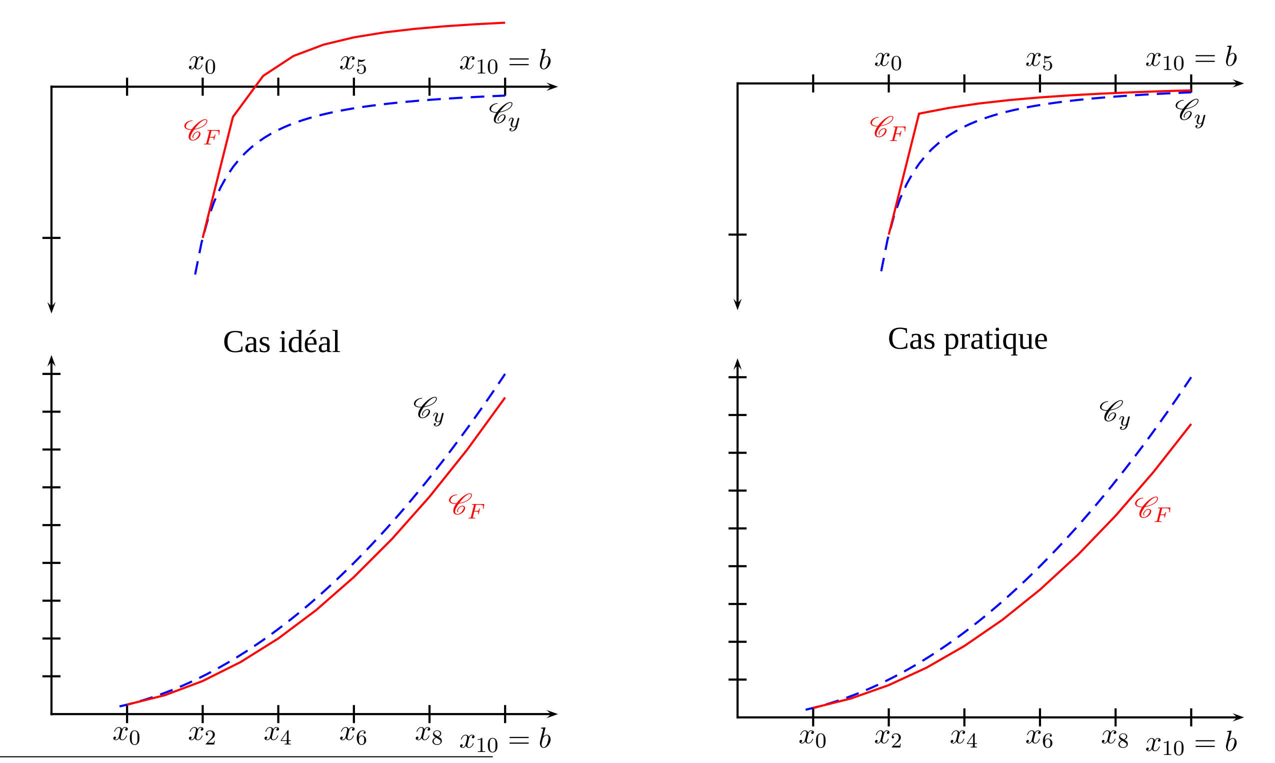
1. On commence par considérer une subdivision de $[x_0, b]$ (ou $[b, x_0]$) en n sous-intervalles isométriques : $\forall\ k \in \{0, \ldots, n-1\}, x_{k+1} = x_k + h, \quad$ où $h = \dfrac{b - x_0}{n}$.
2. On approche la fonction y solution de (S) par une fonction affine par morceaux F telle que $\forall\ k \in \{0, \ldots, n-1\}, \forall\ x \in\ [x_k, x_{k+1}], \quad F(x) = F_k(x)$.

   Il ne reste plus qu'à définir la fonction F_k pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. **Dans l'idéal**, il faudrait que
   - ◇ sur $[x_0, x_1]$, $\mathscr{C}_{F_0}$ soit la tangente en x_0 à la courbe solution $\mathscr{C}_y$;
   - ◇ sur $[x_k, x_{k+1}]$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, F soit de même coefficient directeur que la tangente en x_k à la courbe $\mathscr{C}_y$ (tracée en bleu pour information), et d'ordonnée à l'origine donnée par l'égalité $F_k(x_k) = F_{k-1}(x_k)$.

   Cependant, ce procédé ne peut être retenu car on ne connaît ni la fonction y, ni par conséquent le nombre $y'(x_k) = f\big(x_k, y(x_k)\big)$ qui nous donne le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_y$ en x_k...

   Dans la pratique, nous choisirons donc pour approximation de $y'(x_k) = f\big(x_k, y(x_k)\big)$ le nombre $f(x_k, y_k)$, puisque y_k est une approximation du nombre $y(x_k)$.

Voici quatre figures qui correspondent respectivement aux cas idéaux et pratiques[1] :



[1] : ATTENTION, ce ne sont pas les figures de gauche qui donnent la construction de F (mais celles de droite qui se basent sur f), puisqu'on rappelle qu'on ne connaît pas, et on ne peut calculer, les nombres dérivés $y'(x_k)$! ! !



`Remarque 1` : Comme vu sur les graphiques précédents, le cas pratique peut s'avérer plus ou moins efficace selon la fonction f donnée : les fonctions données pour les deux cas représentés ci-dessus sont respectivement

$$f(x,y) = \frac{e^x}{10x}(x-1) \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = \sqrt{y},$$

avec pour conditions initiales respectives $y(2) = -1$ et $y(1) = \frac{1}{4}$, et dont les solutions respectives (normalement non connues, mais on a choisi ici de résoudre les équations différentielles afin de pouvoir représenter leur solution à titre de comparaison) sont

$$y = \frac{e^x}{10x} - \frac{e}{10} + 1 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{x^2}{4}.$$

On constate effectivement que la méthode pratique est plus précise que la méthode idéale dans le premier cas et *vice versa* dans le second. Rappelons une dernière fois que les graphiques dans le cas idéal ont été réalisés à titre de comparaison, puisqu'on ne peut techniquement pas construire le cas idéal, ne connaissant pas la solution y et par conséquent les nombres $y'(x_k)$.

Théorème 1 : La courbe $\mathscr{C}_y$ de la solution y peut être approchée par la courbe $\mathscr{C}_F$ de la fonction F affine par morceaux définie en reliant les points de coordonnées (x_k, y_k) (pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$, où y_k est défini par

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{k+1} = y_k + f(x_k,y_k)\cdot h, \quad \forall\, k \in \{0,\ldots,n-1\}. \end{cases}$$

démonstration *: Soit $k \in \{0,\ldots,n-1\}$. Une fonction affine de coefficient directeur c sur $[x_k, x_{k+1}]$ passant par (x_k, y_k) a pour équation $y = y_k + c(x - x_k)$. Or on a ici que $c = f(x_k, y_k)$ (approximation de $y'(x_k)$), donc*

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k,y_k)\cdot(x_{k+1} - x_k),$$

d'où le résultat. ■

81.3 Exemples

81.3.1 L'exponentielle

On sait que la fonction $x \longmapsto \exp(x)$ est l'unique solution de $y' = y = f(x,y)$ avec $y(0) = 1$. On pose $x_0 = 0$ et $n = 5$. On s'intéresse à l'approximation de la courbe $\mathscr{C}_y$ sur l'intervalle $[0,1]$. On a alors

$$y_0 = 1, \qquad h = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \{0,\ldots,4\},\ y_{k+1} = y_k + f(x_k,y_k)h = y_k + y_k\frac{1}{5} = \frac{6}{5}y_k,$$

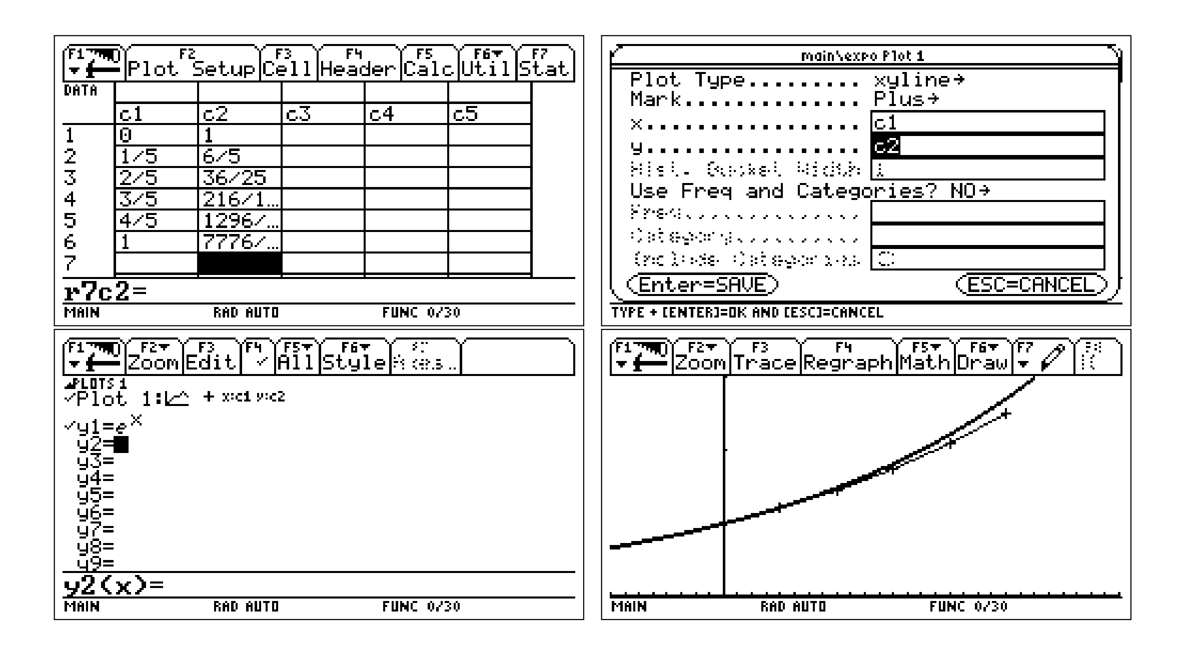
d'où le tableau suivant :

x_k	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
y_k	1	$\left(\frac{6}{5}\right)$	$\left(\frac{6}{5}\right)^2$	$\left(\frac{6}{5}\right)^3$	$\left(\frac{6}{5}\right)^4$	$\left(\frac{6}{5}\right)^5$

Puis on trace à l'aide de la calculatrice notre polygone de nuage de points et la fonction solution $y = \exp(x)$. La fenêtre graphique utilise $x \in [-0,4\ ;\ 1,4]$ avec un pas de graduation de $0,05$ et $y \in [0,3]$ avec un pas de graduation de 1.



"Mode d'emploi" :
À l'allumage de la calculatrice, aller dans "Data/Matrix" afin de construire une nouvelle `Data` appelé par exemple `expo`. Remplissez alors le tableau à l'aide de celui ci-dessus afin d'obtenir le premier écran ci-dessous. Un appui sur `F2` puis sur `F1` nous amène ensuite à un écran qui sera le même que le second écran ci-dessous, après remplissage. Il faut ensuite appuyer deux fois sur `Enter` et entrer dans l'écran graphique `Y=` (touche Diamond, puis `W`), encore appuyer sur la flèche du haut pour bien faire apparaître la ligne `Plot1` définie précédemment, et descendre sur `Y1=` pour entrer la fonction exponentielle. Une fois entrée, retourner grâce au curseur sur la ligne `Y1=`, appuyer sur `F6` et sélectionner `Thick`. On obtient alors le troisième écran. Il ne reste plus qu'à modifier la fenêtre graphique comme indiqué avant de lancer le tracé de la courbe, obtenu sur le quatrième écran.



81.3.2 Un autre problème…

Soit (S) le problème suivant :

$$\begin{cases} y' = y + x = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Soient $n = 4$, $x_0 = 0$, $b = 4$ et donc $h = 1$. On trouve alors que

$$\forall\ k \in \{0, \ldots, 3\}, \quad y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k) = y_k + y_k + x_k = 2y_k + x_k,$$

d'où le tableau suivant :

x_k	0	1	2	3	4
y_k	0	0	1	4	11

Soient maintenant $n = 4$, $x_0 = 0$, $b = -4$ et donc $h = -1$. Dans ce cas,

$$\forall\ k \in \{0, \ldots, 3\}, \quad y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k) = y_k - y_k - x_k = -x_k,$$

d'où le tableau suivant :

x_k	0	-1	-2	-3	-4
y_k	0	0	1	2	3

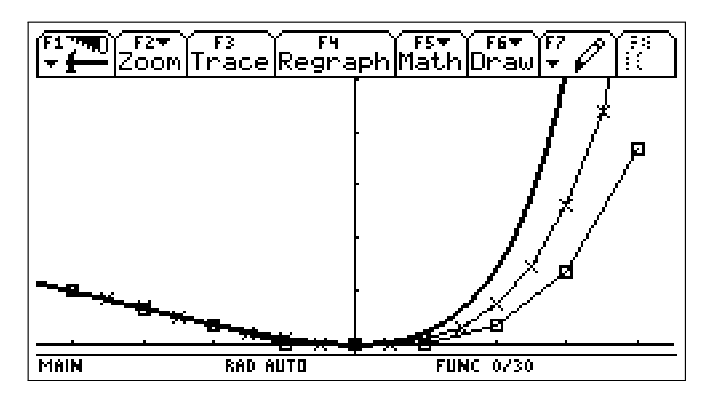
2. Soient $n = 8$, $x_0 = 0$, $b = 4$ et donc $h = 1/2$. Les calculs donnent alors le tableau suivant :

x_k	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
y_k	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{35}{8}$	$\frac{125}{16}$	$\frac{423}{32}$	$\frac{1381}{64}$

Soient maintenant $n = 8$, $x_0 = 0$, $b = -4$ et donc $h = -1/2$. On obtient alors le tableau suivant :

x_k	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{7}{2}$	-4
y_k	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{17}{16}$	$\frac{49}{32}$	$\frac{129}{64}$	$\frac{321}{128}$	$\frac{769}{256}$

On sait que la solution de ce problème est la fonction $y = \exp(x) + \frac{x^2}{2} - 1$. On affiche donc cette courbe (toujours à titre de comparaison...) et nos deux nuages de points obtenus pour $n = 4$ (les $\square$) et $n = 8$ (les $\times$). On constate que plus n est grand, plus l'approximation est précise :

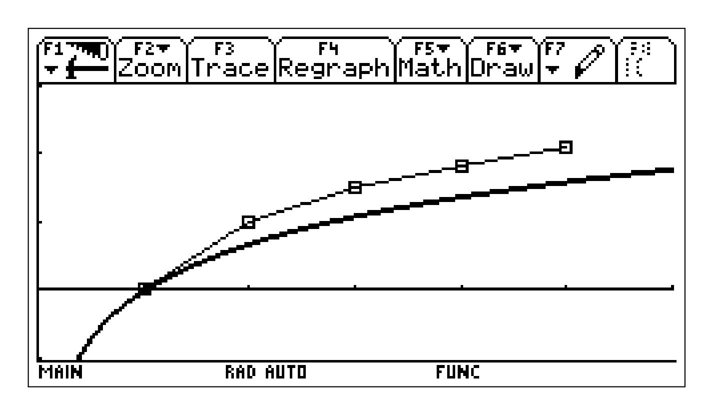


81.3.3 À l'aide d'un programme

On peut aussi écrire un programme (voir sur le site `http://pedagomaths.ifrance.com/` de Cécile F., rubrique "Calculatrice Voyage 200", c'est le programme appelé `euler`) qu'on peut appliquer à un problème tel que celui-ci :

$$(S) \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

afin de déterminer la courbe qui approchera la solution de ce problème sur l'intervalle $[1, 5]$. On peut également afficher la solution $y = \ln(x)$ afin de voir que le programme fonctionne bien :



La fonction logarithme a été placée en `Y1`, et on l'a représenté en "`Thick`".